



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

加加练

JIAJIALIAN

回归学科基础 · 查漏补缺
衔接一轮复习 · 节时高效

主 编 肖德好

高考
数学

CONTENTS



第 1 练 集合与常用逻辑用语	001	第 17 练 任意角和弧度制及任意角的三角函数	039
第 2 练 不等式的性质与基本不等式	003	第 18 练 诱导公式与同角三角函数的基本关系	041
第 3 练 二次函数、一元二次方程与不等式 ...	005	第 19 练 三角恒等变换	043
第 4 练 函数的概念及其表示	007	第 20 练 正弦、余弦、正切函数的图象与性质	045
第 5 练 函数的单调性与最值	009	第 21 练 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换	047
第 6 练 函数的奇偶性、对称性与周期性	011	第 22 练 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质及三角函数模型的应用	049
🔥 热点提升 1 函数的性质与应用	013	第 23 练 正弦定理和余弦定理	051
🔥 阶段验收 1 8 单选 + 3 多选 + 3 填空 + 函数性质	014	第 24 练 正弦定理与余弦定理的应用	053
第 7 练 指数、对数的运算	016	第 25 练 解三角形解答题专练 (一)	055
第 8 练 指数、对数函数的图象及其性质	018	第 26 练 解三角形解答题专练 (二)	057
第 9 练 幂、指数、对数函数之间比较大小	020	🔥 阶段验收 3 8 单选 + 3 多选 + 3 填空 + 解三角形 + 函数与导数	059
第 10 练 函数的图象	022	第 27 练 平面向量的概念及其线性运算	061
第 11 练 函数的零点与方程的解	024	第 28 练 平面向量的基本定理及坐标运算	063
第 12 练 函数与数学模型	026	第 29 练 平面向量的数量积	065
🔥 热点提升 2 函数图象的应用	028	第 30 练 平面向量的综合应用	067
第 13 练 导数的几何意义及其应用	029	第 31 练 复数	069
第 14 练 导数与函数的单调性、极值与最值	031	🔥 热点提升 3 平面向量的线性运算与数量积	071
第 15 练 导数与不等式的恒成立、能成立问题	033		
第 16 练 导数与函数的零点	035		
🔥 阶段验收 2 8 单选 + 3 多选 + 3 填空 + 函数与导数	037		

第 32 练	数列的概念及表示	072
第 33 练	等差数列、等比数列	074
第 34 练	由 a_n 与 S_n 的关系式与递推关系式求 a_n	076
第 35 练	数列求和	078
第 36 练	数列解答题专练 (一)	080
第 37 练	数列解答题专练 (二)	082
 阶段验收 4	8 单选 + 3 多选 + 3 填空 + 数列 + 解三 角形 + 函数与导数	084
第 38 练	空间几何体的展开图、表面积与体积	086
第 39 练	球的切接问题	088
第 40 练	点、线、面的位置关系	090
第 41 练	空间中的平行与垂直	092
第 42 练	空间向量的运算及应用	094
第 43 练	空间角与空间距离	096
第 44 练	立体几何解答题专练 (一)	098
第 45 练	立体几何解答题专练 (二)	100
 热点提升 4	几何体的截面问题	102
 热点提升 5	空间几何体的折叠与展开问题	103
 阶段验收 5	8 单选 + 3 多选 + 3 填空 + 解三角形 + 数列 + 立体几何 + 函数与导数	104
第 46 练	直线与圆的方程	107
第 47 练	直线与圆、圆与圆的位置关系	109
 热点提升 6	直线与圆中的最值问题	111
第 48 练	椭圆、双曲线的标准方程和几何性质	112

第 49 练	抛物线的标准方程和几何性质	114
第 50 练	直线与圆锥曲线的位置关系	116
第 51 练	解析几何解答题专练 (一)	118
第 52 练	解析几何解答题专练 (二)	120
 热点提升 7	离心率问题	122
 热点提升 8	圆与圆锥曲线	123
 阶段验收 6	8 单选 + 3 多选 + 3 填空 + 解三角形 + 函数与导数 + 立体几何 + 解析几何	124
第 53 练	排列组合、二项式定理	127
第 54 练	古典概型、概率的基本性质	129
第 55 练	事件的相互独立性、条件概率与全概率公 式	131
第 56 练	离散型随机变量及其分布列、均值与方差	133
第 57 练	超几何分布与二项分布、正态分布	135
第 58 练	用样本估计总体	137
第 59 练	成对数据的统计分析	139
第 60 练	概率与统计解答题专练 (一)	142
第 61 练	概率与统计解答题专练 (二)	144
 阶段验收 7	8 单选 + 3 多选 + 3 填空 + 解三角形 + 函数与导数 + 立体几何 + 解析几何 + 统计概率	146
 参考答案		149

第1练 集合与常用逻辑用语 (时间:40分钟)

训练要点:集合的概念与表示、集合与元素的关系、集合与集合间的关系、集合的运算、充要条件的判断、含量词命题的判断和否定

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

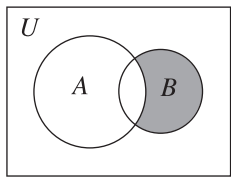
1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x - 1 \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 0 < x < 3\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$
C. $\{x | 0 < x < 2\}$ D. $\{x | -1 < x < 2\}$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 < 0$
B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$
C. $\forall x \notin \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$
D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 < 0$

3. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, 则图中的阴影部分表示的集合为 ()



- A. $\{6, 8\}$ B. $\{6, 7, 8\}$
C. $\{1, 3, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

4. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 2, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x(x - a) = 0\}$, 且 $A \supseteq B$, 则实数 a 的取值集合为 ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{1, 0\}$
C. $\{-1, 1\}$ D. $\{1, 0, -1\}$

5. 已知 $p: \frac{x-1}{x+2} \leq 0$, $q: -2 \leq x \leq 1$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

6. 已知集合 $A = \{(x, y) | y \geq x, x, y \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{(x, y) | x + y = 8\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 6

7. 某班共50人,参加A项比赛的共有28人,参加B项比赛的共有33人,且A,B两项都不参加的人数比A,B都参加的人数的三分之一多1人,则只参加A项比赛不参加B项比赛的有 ()

- A. 7人 B. 8人
C. 10人 D. 无法计算

8. 已知 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, $B \cap (\complement_U A) = \emptyset$, 则实数 m 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ 或 1 B. $-\frac{1}{2}$ 或 0
C. 1 或 0 D. $-\frac{1}{2}$ 或 1 或 0

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 下列命题中, 是真命题的是 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$
- B. $\forall x \in \mathbf{R}, \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0$
- C. $\exists x \in \mathbf{R}, \lg x < 1$
- D. $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x + \cos x = 2$

10. 已知集合 $M = \{-1, 1\}$, $N = \{x | -2 \leq x < 1\}$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $M \cap N$ 有 2 个子集
- B. $M \cup N$ 中任意两个元素差的最小值为 -3
- C. $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \emptyset$
- D. $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$

11. 若“ $\exists x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], 2x^2 - \lambda x + 1 < 0$ ”是假命题, 则实数 λ 的值可能是 ()

- A. $\frac{3}{2}$
- B. $2\sqrt{2}$
- C. 3
- D. $\frac{9}{2}$

三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$ 与集合 $\{a^2, a + b, 0\}$ 相等, 则 $a^{2024} + b^{2024} =$ _____.

13. 已知 $A = \left\{x \mid \frac{2}{x+1} > 1\right\}$, $B = \{x | m \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cup B = B$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

14. 设 $p: 0 < \ln(x-2) \leq \ln 3$, $q: 2m \leq x \leq 2m+3$. 若 q 是 p 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围是 _____.

知识卡片

- (1) 若有限集 A 中有 n 个元素, 则 A 的子集有 2^n 个, 真子集有 $2^n - 1$ 个, 非空子集有 $2^n - 1$ 个, 非空真子集有 $2^n - 2$ 个.
- (2) 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集.
- (3) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
- (4) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow (\complement_U A) \supseteq (\complement_U B) \Leftrightarrow A \cap (\complement_U B) = \emptyset$.
- (5) $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$; $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.
- (6) 用 $\text{card}(A)$ 表示有限集合 A 中元素的个数, 对任意两个有限集合 A, B , 有 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

第2练 不等式的性质与基本不等式 (时间:40 分钟)

训练要点:不等式的性质、比较大小、基本不等式及应用

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 设 $M = x^2 - xy$, $N = xy - y^2$, 则 M 与 N 的值的大小关系是 ()
 A. $M < N$ B. $M \leq N$
 C. $M > N$ D. $M \geq N$
- 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ()
 A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$
 C. $a|c| > b|c|$ D. $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$
- 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{2}{x}$ 的最小值为 ()
 A. 2 B. 3
 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
- [人教A版必修第一册P43习题2.1T5改编] 已知 $2 < a < 3$, $-2 < b < -1$, 则 $2a + b$ 的取值范围是 ()
 A. (2, 5) B. (-5, -2)
 C. (1, 3) D. (-3, -1)
- 已知 $a + b = 2$, $a > 0$, $b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 ()
 A. 9 B. $\frac{9}{2}$
 C. 4 D. 6
- [人教A版必修第一册P58复习参考题2T5改编] 已知 $a, b > 0$, 且 $ab = a + b + 8$, 则 ab 的取值范围是 ()
 A. $[16, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$
 C. $(0, 16]$ D. $(0, 4]$
- 某公园拟用栅栏围成一个扇形花池, 已知围扇形花池一周的栅栏总长 $C = 80$ m, 则此扇形花池的面积 S 最大为 ()
 A. 200 m^2 B. 300 m^2
 C. 400 m^2 D. 500 m^2
- 两个工厂生产同一种产品, 其产量分别为 a, b ($0 < a < b$). 为便于调控生产, 分别将 $\frac{x-a}{b-x} = 1$, $\frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{x}$, $\frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{b}$ 中 x ($x > 0$) 的值记为 A, G, H 并进行分析, 则 A, G, H 的大小关系为 ()
 A. $H < G < A$ B. $G < H < A$
 C. $A < G < H$ D. $A < H < G$

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 已知 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 ()

A. $a - d > b - c$ B. $ac > bd$

C. $\frac{c}{b} > \frac{d}{a}$ D. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

10. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + 2b = 2$, 则 ()

A. ab 的最大值为 $\frac{1}{2}$

B. $a + \frac{4}{a}$ 的最小值为 4

C. $a^2 + 4b^2$ 的最小值为 2

D. $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值为 4

11. 已知 $a, b, c \in (0, +\infty)$, 则下列说法正确的有 ()

A. $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

B. 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, 则 $a + 4b + 9c \geq 38$

C. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

D. 若 $a + b + c = 2$, 则 $ab + ac + bc \geq \frac{9}{2}abc$

三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 设 $xy > 0$, 则 $\frac{2y-x}{x} + \frac{x+2y}{y}$ 的最小值为 _____.

13. 已知 $-2 < 3a + 2b < 3, 2 < a - 3b < 4$, 则 $5a + 7b$ 的取值范围是 _____.

14. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a > 1)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{a+b+1}{a-1}$ 的最小值为 _____.

知识卡片

(1) 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

(2) 应用基本不等式求最值要注意“一正, 二定, 三相等”, 忽略某个条件, 就会出错.

(3) 在利用不等式求最值时, 若多次使用基本不等式, 则一定要保证它们等号成立的条件一致.

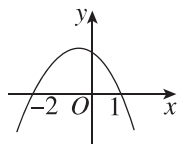
第3练 二次函数、一元二次方程与不等式

(时间:40分钟)

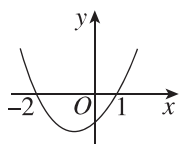
训练要点:二次函数的图象与性质、一元二次方程的解法、一元二次不等式的解法、三个二次之间的关系、对给定的一元二次不等式求参数范围

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

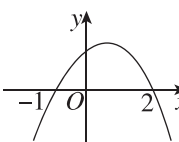
1. [2025·全国二卷 T4] 不等式 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 的解集是 ()
A. $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | x \leq -2\}$
C. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ D. $\{x | x > 1\}$
2. 已知“任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $x^2 - 4x - a - 1 \geq 0$ 恒成立”, 则 a 的取值范围为 ()
A. $(-\infty, -5]$ B. $(-\infty, -2]$
C. $(-5, +\infty)$ D. $[-5, +\infty)$
3. 已知方程 $x^2 + 2mx - m + 12 = 0$ 的两根都大于 -2 , 则实数 m 的取值范围是 ()
A. $m < -4$
B. $-5 < m < -4$
C. $m \leq -4$
D. $m > 4$ 或 $m < -4$
4. 不等式 $cx^2 + ax + b > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < \frac{1}{2}\}$, 则函数 $y = ax^2 - bx - c$ 的图象大致为 ()



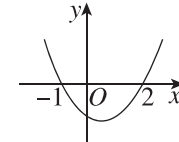
A



B



C



D

5. 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + b^2 - b + 1$ ($a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$), 对任意实数 x 都有 $f(1-x) = f(1+x)$ 成立. 若当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 则 b 的取值范围是 ()
A. $(-1, 0)$
B. $(2, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
D. 不能确定
6. 已知二次函数 $f(x) = (x-m)(x-n) + 1$ ($m < n$), 且 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是方程 $f(x) = 0$ 的两根, 则 x_1, x_2, m, n 的大小关系是 ()
A. $x_1 < x_2 < m < n$ B. $x_1 < m < x_2 < n$
C. $m < n < x_1 < x_2$ D. $m < x_1 < x_2 < n$
7. 若存在实数 x , 使得 $mx^2 - (m-2)x + m < 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围为 ()
A. $(-\infty, 2)$
B. $(-\infty, 0] \cup (\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$
C. $(-\infty, \frac{2}{3})$
D. $(-\infty, 1)$
8. 关于 x 的不等式 $x^2 - 2(m+1)x + 4m \leq 0$ 的解集中恰有4个正整数, 则实数 m 的取值范围是 ()
A. $(\frac{5}{2}, 3)$
B. $[\frac{5}{2}, 3)$
C. $(-1, -\frac{1}{2}]$
D. $(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}, 3)$

二、选择题(本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分)

9. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax + b = 0$, 则下列命题为真命题的有 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$
- B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$
- C. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$
- D. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$

10. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 3\}$, 则 ()

- A. $y = ax^2 + bx + c$ 有最大值
- B. $b = -2a$
- C. $6b = -5c$
- D. $bx^2 + a|x| - c > 0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

11. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a > 0)$ 有且只有一个零点, 则 ()

- A. $a^2 - b^2 \leq 4$
- B. $a^2 + \frac{1}{b} \geq 4$
- C. 若关于 x 的不等式 $x^2 + ax - b < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则 $x_1 x_2 > 0$
- D. 若关于 x 的不等式 $x^2 + ax + b < c$ 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $|x_1 - x_2| = 4$, 则 $c = 4$

三、填空题(本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

12. 不等式 $-2x^2 + 3x + 5 > 0$ 的解集为 _____.

13. 已知关于 x 的方程 $x^2 - a^2x - a + 1 = 0$ 的两根分别在区间 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 内, 则实数 a 的取值范围为 _____.

14. 若关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 在 $(0, 2]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围是 _____.

知识卡片

1. 解一元二次不等式的一般方法和步骤

- (1)化:把不等式变形为二次项系数大于零的形式;
- (2)判:计算对应一元二次方程的判别式,根据判别式判断方程有没有实根(无实根时,不等式的解集为 $\mathbf{R}$ 或 $\emptyset$);
- (3)求:求出对应的一元二次方程的根;
- (4)写:结合二次函数图象,利用“大于取两边,小于取中间”写出不等式的解集.

2. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 ≥ 0) 的恒成立、能成立问题

$$\begin{cases} a=0 \Rightarrow \text{代入计算} \\ a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \text{ 为任意实数} \begin{cases} \forall (\text{恒成立}): \text{开口方向、}\Delta \\ \exists (\text{存在}): \text{分离参数或分类讨论} \end{cases} \\ x \text{ 为某区间上的实数 (分离参数法)} \Rightarrow \text{参数与无参函数的最值问题} \begin{cases} \forall: \text{大于最大, 小于最小} \\ \exists: \text{大于最小, 小于最大} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

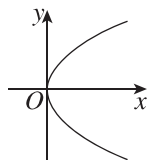
第4练 函数的概念及其表示

(时间:40 分钟)

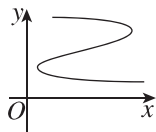
训练要点:函数的概念与表示、函数的定义域、函数的值域、分段函数

一、选择题 (本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

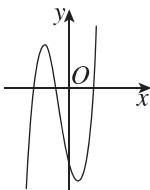
1. 下列图象可以表示以 x 为自变量的函数图象的是 ()



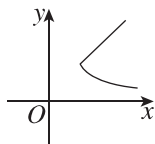
A



B



C



D

2. 已知函数 $f(x) = x^2$ 的定义域 $A \subseteq \mathbf{R}$, 值域 $B = \{9\}$, 则满足条件的 $f(x)$ 有 ()

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

3. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \ln(4-x)$ 的定义域是 ()

- A. $(4, +\infty)$ B. $(2, 4)$
C. $[2, 4)$ D. $(2, +\infty)$

4. 下列各组函数中是同一个函数的是 ()

- A. $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = (\sqrt{x})^2$
B. $f(x) = x^2, g(x) = (x+1)^2$
C. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, g(x) = x-1$
D. $f(x) = x + \frac{1}{x}, g(t) = t + \frac{1}{t}$

5. 已知函数 $f(x)$ 由下表给出:

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	2	4

那么 $f[f(3)] =$ ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 4\log_2(x-1), & x > 1, \\ 2f(x+2), & x \leq 1, \end{cases}$ 则 $f(-1) =$ ()

- A. 2 B. 4
C. 8 D. 16

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = \frac{1-x^2}{x^2} (x \neq 0)$, 则 $f(x) =$ ()

- A. $\frac{1}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 0)$
B. $\frac{1}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 1)$
C. $\frac{4}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 0)$
D. $\frac{4}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 1)$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{mx^2+2mx+1}}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $0 < m < 1$ B. $0 < m \leq 1$
C. $0 \leq m < 1$ D. $0 \leq m \leq 1$

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 已知矩形的面积为 10, 矩形的长为 x , 宽为 y , 对角线长为 d , 周长为 l , 则下列关系式中正确的有 ()

A. $l = 2x + \frac{20}{x} (x > 0)$

B. $y = \frac{10}{x} (x > 0)$

C. $l = 2\sqrt{d^2 + 20} (d > 0)$

D. $d = \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2}} (x > 0)$

10. 下列函数中, 其定义域与值域相同的是 ()

A. $y = \sqrt{x-1} + 1$

B. $y = |\ln x|$

C. $y = \frac{1}{3^x - 1}$

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 2, \end{cases}$ 则关于函数 $f(x)$ 的结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$

B. $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 4)$

C. 若 $f(x) = 3$, 则 x 的值是 $\sqrt{3}$

D. $f(x) < 1$ 的解集为 $(-1, 1)$

三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right) + 3x$, 则 $f(x)$ 的解析式为 _____.

13. (1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则函数 $f(x^2 + 1)$ 的定义域是 _____;

(2) 已知函数 $f(x^2 - 2)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是 _____;

(3) 已知函数 $f(2x - 3)$ 的定义域为 $[1, 3]$, 则函数 $f(1 - 3x)$ 的定义域是 _____.

14. 函数 $f(x) = \frac{x-4}{2x+5}$ 在 $[-2, -1]$ 上的取值范围是 _____.

知识卡片

求函数解析式的常用方法

(1) 待定系数法: 若已知函数的类型, 可用待定系数法;

(2) 换元法: 已知复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式, 可用换元法, 此时要注意新元的取值范围;

(3) 配凑法: 由已知条件 $f[g(x)] = F(x)$, 可将 $F(x)$ 改写成关于 $g(x)$ 的解析式, 然后以 x 替代 $g(x)$, 便得 $f(x)$ 的解析式;

(4) 方程组法: 已知关于 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 或 $f(-x)$ 的等式, 可根据已知条件再构造出另外一个等式, 通过解方程组求出 $f(x)$;

(5) 赋值法: 通过给变量赋特殊值, 求出特殊的函数值, 进而得到 $f(x)$ 的解析式.

第5练 函数的单调性与最值

(时间:40分钟)

训练要点:求函数单调区间、已知单调区间求参数值(范围)、复合函数单调性、函数的最值

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 下列函数在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y=1-x$ B. $y=x^2-2x$
C. $y=x$ D. $y=\frac{2}{x}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$
C. $[0, \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, 1]$

3. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,则下列函数一定是增函数的是 ()

- A. $f(x)+g(x)$
B. $f(x)-g(x)$
C. $g(x)-f(x)$
D. $f(x)g(x)$

4. 函数 $g(x)=\frac{2x-1}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最小值是 ()

- A. -1 B. 0
C. -2 D. $\frac{3}{2}$

5. 函数 $f(x)$ 在 $[-3, -1]$ 上单调递增,且 $f(x)$ 在 $[-3, -1]$ 上的最小值为 -2 ,最大值为 1 ,那么 $|f(x)|$ 在 $[-3, -1]$ 上的 ()

- A. 最小值为 -2 ,最大值为 1
B. 最小值为 0 ,最大值为 1
C. 最小值为 0 ,最大值为 2
D. 最小值为 -2 ,最大值为 0

6. 用 $\min\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最小值. 设 $f(x)=\min\{2^x, x+2, 10-x\} (x \geq 0)$, 则 $f(x)$ 的最大值为 ()

- A. 4 B. 5
C. 6 D. 7

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1-a}{x}, & x < -1, \\ x^2+(4-a)x+2a-1, & x \geq -1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则实数 a 的取值范围为 ()

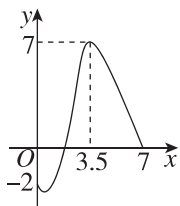
- A. $[\frac{3}{2}, 2]$ B. $(1, \frac{3}{2}]$
C. $(1, 2]$ D. $(\frac{5}{4}, 2]$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2mx-m^2, & x \leq m, \\ |x-m|, & x > m, \end{cases}$ 若 $f(a^2-4) > f(3a)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 4)$
B. $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$
C. $(-4, 1)$
D. $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 已知偶函数 $f(x)$ 定义在 $[-7, 7]$ 上, 它在 $[0, 7]$ 上的图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()



- A. 函数 $f(x)$ 有三个单调递增区间
B. 函数 $f(x)$ 有三个单调递减区间
C. 函数 $f(x)$ 的最大值是 7
D. 函数 $f(x)$ 的最小值是 -2

10. 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2 - ax + 1$, 若对任意 $x_1 \in [1, 3]$, $x_2 \in [1, 3]$, 都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 a 的值可以是 ()
- A. -2 B. -3
C. 2 D. 3

11. 函数 $f(x) = \log_a |x-1|$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则下列说法正确的是 ()
- A. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增且无最大值
B. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减且无最小值
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
D. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称

三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \leq 2, \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上有最小值, 则实数 a 的取值范围为_____.
13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且恒有 $f[f(x) - \ln x] = 1$, 则 $f(x)$ 的解析式为_____.
14. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 a, b 都有 $f(a+b) = f(a) + f(b) - 1$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$. 若 $f(2) = 3$, 则不等式 $f(x^2 - x - 1) < 2$ 的解集为_____.

知识卡片

求值域的常用方法

(1) 配方法: 二次函数型的函数均可以采用配方法求值域;

(2) 分离常数法: 形如 $y = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d}$ ($ac \neq 0$) ($f(x)$ 为常见的基本初等函数) 的函数常用分离常数法或反解法 (即用 y 表示 $f(x)$, 然后借助 $f(x)$ 的取值范围求 y 的取值范围);

(3) 换元法: 形如 $y = ax \pm b \pm \sqrt{cx \pm d}$, 可以通过 $\sqrt{cx \pm d} = t$ 换元, 转化为二次式配方求解, 要注意换元后新元的取值范围. 对比较复杂的函数可通过换元转化为熟悉的函数, 再用相应的方法求值域;

(4) 基本不等式法: 先对解析式变形, 使之具备“一正二定三相等”的条件后, 用基本不等式求出值域;

(5) 单调性法: 先确定函数的单调性, 再由单调性求值域.

第6练 函数的奇偶性、对称性与周期性

(时间:40分钟)

训练要点:函数的奇偶性、函数图象的对称性、函数的周期性

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

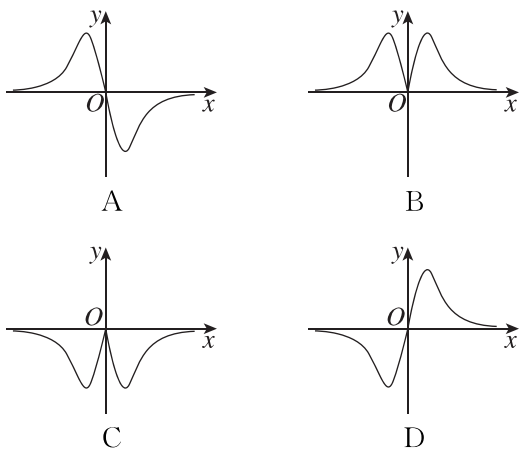
1. 若 $f(x) = \begin{cases} x-2 & (x < 10), \\ f(x-6) & (x \geq 10), \end{cases}$ 则 $f(21)$ 的值为 ()

- A. 1 B. 3
C. 5 D. 7

2. 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$ 是定义在 $(-\infty, b-3] \cup [b-1, +\infty)$ 上的奇函数. 若 $f(2)=3$, 则 $a+b$ 的值为 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 0

3. 函数 $f(x) = \frac{4x}{1+x^4}$ 的图象大致是 ()



4. 已知函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x + e^{-x}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数
B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数
C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数
D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

5. [2025·全国一卷 T5] 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5-2x$, 则 $f(-\frac{3}{4}) =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则“ $f(x)$ 的周期为 2”是“ $f(x) = \frac{1}{f(x+1)}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 若 $f(x) - g(x) = 2^{2-x}$, 则 $g(-1) =$ ()

- A. 5 B. -5
C. 3 D. -3

8. 若对任意 $m, n \in \mathbf{R}$, $g(m+n) = g(m) + g(n) - 4$, 则 $f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x^2+1} + g(x)$ 的最大值与最小值之和是 ()

- A. 4 B. 6
C. 8 D. 10

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 下列函数中既是奇函数, 又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

- A. $f(x) = x^3$
 B. $f(x) = -2024x$
 C. $f(x) = \sqrt{x}$
 D. $f(x) = \frac{1}{x}$

10. 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $f(x+1) = f(x-1)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
 B. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称
 C. 函数 $y = f(1+x)$ 与函数 $y = f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
 D. 若函数 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $f(x)$ 为偶函数

11. 德国著名数学家狄利克雷在数学领域成就显著, 狄利克雷函数就以其名字命名, 该函数解析式为 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$ 其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数集, 则下列结论正确的有 ()

- A. 狄利克雷函数是偶函数
 B. 狄利克雷函数是周期函数, 无最小正周期
 C. 不等式 $D(x) \geq x^2$ 的解集为 $\{-1, 1\}$
 D. 函数 $f(x) = x^2 - 2D(x) \cdot x - 3$ 有四个不同的零点

三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 2$, 则 $f(-1) =$ _____, 函数 $f(x)$ 的解析式为 _____.

13. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 若 $f(a-1) > f(2-a)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2(x+1)$, 则 $f(2024) + f(2025) + f(2026) =$ _____.

知识卡片

1. 奇(偶)函数定义的等价形式

- (1) $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(-x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数;
 (2) $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

2. 函数周期性常用结论

若 $a > 0$, 对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x :

- (1) 若 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $T = 2a$; (2) 若 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$, 则 $T = 2a$;
 (3) 若 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$, 则 $T = 2a$.

3. 对称性的两个常用结论

- (1) 若函数 $y = f(x+a)$ 是偶函数, 即 $f(a-x) = f(a+x)$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称;
 (2) 若函数 $y = f(x+b)$ 是奇函数, 即 $f(-x+b) + f(x+b) = 0$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(b, 0)$ 中心对称.

训练要点:函数的单调性、奇偶性、对称性、周期性及其综合应用

一、选择题(本题共 7 小题,每小题 5 分,共 35 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 如果今天是星期三,那么经过 $7k-6, k \in \mathbf{N}^*$ 天的那一天是 ()

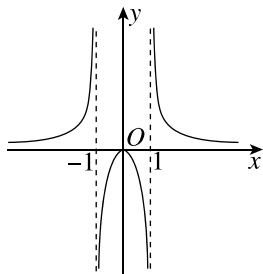
- A. 星期三 B. 星期四
C. 星期五 D. 星期六

2. 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 3x - 4)$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, \frac{3}{2})$
C. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

3. [2025 · 天津卷 T3] 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图,则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()

- A. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$
B. $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$
C. $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2}$
D. $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$



4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{2})^x, & a \leq x < 0, \\ -x^2 + 2x, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases} (a < 0)$

的值域是 $[-8, 1]$,则实数 a 的取值范围是

- ()
A. $(-\infty, -3]$ B. $[-3, 0)$
C. $[-3, -1]$ D. $[-3, +\infty)$

5. 若偶函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x) \cdot f(x+1) = 1, f(-2) = -1$,则 $f(2025) =$ ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4) = -f(x)$,且 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增,则 ()

- A. $f(-15) < f(21) < f(90)$
B. $f(90) < f(21) < f(-15)$
C. $f(-15) < f(90) < f(21)$
D. $f(21) < f(-15) < f(90)$

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,且 $f(3) = 0$,则满足 $(x+1)f(x) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-3, -1] \cup [0, +\infty)$
B. $[-3, 0] \cup [0, +\infty)$
C. $[-3, -1] \cup [0, 3]$
D. $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$

二、选择题(本题共 2 小题,每小题 6 分,共 12 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分)

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,则下列说法正确的是 ()

- A. $f(0) = 0$
B. 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有最小值 -1 ,则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上有最大值 1
C. 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减
D. 函数 $f(x+1)$ 是奇函数

9. 已知函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} (a \neq 0)$,则下列说法正确的有 ()

- A. 当 $a = -4$ 时,函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$
B. 当 $a = 4$ 时,函数 $f(x)$ 有最小值没有最大值
C. 当 $a < 0$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增
D. 当 $a > 0$ 时,函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

三、填空题(本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

10. 已知函数 $f(x) = \frac{|x-2|-a}{\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数,则实数 $a =$ _____.

11. 已知 $f(x) = \frac{1+x}{1-3x}, f_1(x) = f[f(x)], f_2(x) = f[f_1(x)], \dots, f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$,则 $f_{2026}(-2) =$ _____.

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(x+2)$. 若 $f(3+m) + f(3m-7) > 0$,则 m 的取值范围为 _____.

一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()
 A. $\{2\}$ B. $\{-2, 2\}$
 C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 已知命题 $p: \exists x > 1, x^2 + 1 > 0$, 则命题 p 的否定是 ()
 A. $\forall x > 1, x^2 + 1 > 0$
 B. $\forall x > 1, x^2 + 1 \leq 0$
 C. $\exists x > 1, x^2 + 1 \leq 0$
 D. $\exists x \leq 1, x^2 + 1 \leq 0$

3. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则“ $y = f(x)$ 是偶函数”是“ $y = |f(x)|$ 是偶函数”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x) = \ln|x| - \frac{1}{\ln|x|}$, 则下列说法正确的是 ()
 A. $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, 1)$ 上单调递减
 B. $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 C. $f(x)$ 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 D. $f(x)$ 是偶函数, 且在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减

5. 已知正实数 a, b 满足 $a + 4b = ab$, 则 $a + b$ 的最小值为 ()

A. 4 B. 9
 C. 10 D. 20

6. 若不等式 $ax^2 + 2ax - 4 < 2x^2 + 4x$ 对任意实数 x 均成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $-2 < a < 2$
 B. $a < -2$ 或 $a > 2$
 C. $-2 < a \leq 2$
 D. $a \leq -2$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 若 $m < n$, $f(n) = f(m)$, 则 $n - m$ 的取值范围是 ()
 A. $(1, 2]$ B. $[1, 2)$
 C. $(\frac{3}{4}, 2]$ D. $[\frac{3}{4}, 2)$

8. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 且函数 $g(x) = xf(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $(1-x)f(x-1) + 2xf(2x) > 0$ 的解集为 ()
 A. $(-\infty, \frac{1}{3})$ B. $(-\infty, -1)$
 C. $(\frac{1}{3}, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

二、选择题(本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分)

9. 下列函数中值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = \sqrt{x}$ B. $y = x^2 - 2x + 1$
C. $y = -\frac{1}{x}$ D. $y = |x| - 1$

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(0) = 0$
B. $f(-1) = -1$
C. $f(x)$ 为偶函数
D. 若 $f(2) = \frac{1}{2}$, 则 $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{32}$

11. 设 $a > 0, b > 0$, 则下列不等式恒成立的是 ()

- A. $a^2 + 1 > \frac{1}{2}a$
B. $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \geq 4$
C. $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$
D. $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab}$

三、填空题(本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x), & x < 0, \\ 4^x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $f(-7) + f(\log_4 3) =$ _____.

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2, 1]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(x+1)}{x+2}$ 的定义域是 _____.

14. 已知函数 $f(x+1)$ 是奇函数, $f(x+2)$ 是偶函数, 当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = 3 - x$, 则 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2025) + f(2026) =$ _____.

四、解答题(本题共 1 小题,共 17 分)

15. 已知函数 $f(x) = \frac{b-ax}{ax^2+1}$ 是定义在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

上的奇函数, 且 $f(\frac{1}{4}) = -\frac{4}{5}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性, 并用单调性定义给出证明;

(3) 设 $g(x) = kx + 5 - 2k$, 若对任意的 $x_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 总存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

第7练 指数、对数的运算

(时间:40 分钟)

训练要点:根式的概念与性质、分数指数幂、指数的运算性质、对数的概念、对数的运算性质、换底公式

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. [人教 A 版必修第一册 P105 例 1 改编] 计算: $\sqrt{-x^3} =$ ()

- A. $x\sqrt{-x}$ B. $-x\sqrt{x}$
C. $-x\sqrt{-x}$ D. $x\sqrt{x}$

2. 已知 $\log_x 8 = 2$, 则 $x =$ ()

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$
C. 3 D. 4

3. 若 $9^a = 5, \log_3 4 = b$, 则 $3^{2a+b} =$ ()

- A. 10 B. 20
C. 50 D. 100

4. 若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ ()

- A. -1 B. $\lg 7$
C. 1 D. $\log_7 10$

5. 已知 $a = \log_3 5, b = \log_2 3$, 则 $\lg 3 =$ ()

- A. $\frac{b}{ab+1}$ B. $\frac{a}{ab+1}$
C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ D. $\frac{ab}{a+b}$

6. 满足 $a^x = b^y = c^z (a, b, c > 0), \frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$ ($x, y, z \in \mathbf{R}$) 的有序实数组 (a, b, c) 可以是 ()

- A. (4, 3, 2) B. (4, 2, 3)
C. (3, 9, 2) D. (18, 12, 2)

7. 已知 $a + a^{-1} = 3$, 则下列结论中错误的是 ()

- A. $a^2 + a^{-2} = 7$
B. $a^3 + a^{-3} = 18$
C. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{5}$
D. $a\sqrt{a} + \frac{1}{a\sqrt{a}} = 2\sqrt{5}$

8. 若 $e^a = e^{3b} + e^{2+b}$, 则 $a - 2b$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $1 + \ln 2$
C. 1 D. $\ln 2$

二、选择题(本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分)

9. 下列各式中一定成立的是 ()

- A. $\left(\frac{n}{m}\right)^7 = n^7 m^{\frac{1}{7}} (n > 0, m > 0)$
B. $-\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{-3}$
C. $\sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{3}$
D. $[(a^3)^2(b^2)^3]^{-\frac{1}{3}} = a^{-2}b^{-2} (a > 0, b > 0)$

10. 以下运算中正确的有 ()

- A. 若 $\lg 3 = m, \lg 2 = n$, 则 $\log_5 18 = \frac{2m+n}{1-n}$
- B. $[(1-\sqrt{2})^2]^{\frac{1}{2}} - (1+\sqrt{2})^{-1} + (1+\sqrt{2})^0 = 3-2\sqrt{2}$
- C. $(\frac{1}{3})^{-2} - 2\ln(\ln e^e) = 7$
- D. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$

11. 若 $2^x = 3, 3^y = 4$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $y > \frac{3}{2}$ B. $x > y$
- C. $xy = 2$ D. $x + y > 2\sqrt{2}$

三、填空题(本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

12. 计算 $\lg 5 + 7^{\log_7 2} + \log_2 3 \cdot \log_9 4 + \lg 2$ 的值为 _____.

13. 已知 $a > 0, b > 8$, 则 $\frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sqrt[3]{a^5}}{a\sqrt[3]{a}} + \sqrt{4 - 4b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} =$ _____.

14. [2024 · 全国甲卷 T15] 已知 $a > 1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

知识卡片

1. 根式

(1) 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫作 a 的 n 次方根.

(2) 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作根式, 其中 n 叫作根指数, a 叫作被开方数.

(3) $(\sqrt[n]{a})^n = a$. 当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$; 当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

2. 对数的性质与运算性质

(1) 对数的性质: $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, a^{\log_a N} = N (a > 0, \text{且 } a \neq 1, N > 0)$.

(2) 对数的运算性质:

如果 $a > 0$, 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$, 那么:

① $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$;

② $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

③ $\log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R})$.

3. 换底公式及其推论

(1) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, 即 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} (a, b \text{ 均大于 } 0 \text{ 且不等于 } 1)$;

(2) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$;

(3) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d (a, b, c, d \text{ 均大于 } 0, \text{且 } a, b, c \text{ 不等于 } 1)$.